2 blaadjes.

1. $\dot{x} = -ax + u, \quad x(0) = x_0 \qquad |u(t)| \leq M.$

$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)\,dt + x(1).$

a. De Hamiltoniaan:

$H(x,p,u) = p^T f(x,u) + L(x,u) = p(-ax+u) + \frac{1}{2}u^2$

De differentiaalvergelijking voor de co-toestand p:

$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p,u)^T = ap$

$p(1) = \frac{\partial S}{\partial x}(x(1))^T = 1.$

b. De co-toestand p bepalen:

$\left.\begin{array}{l}\dot{p} = ap \\ p(1) = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l} p(t) = e^{at} \cdot c \\ p(1) = e^{a} \cdot c = 1 \end{array} \Rightarrow c = e^{-a} \Big\} \; p^*(t) = e^{a(t-1)}$

Voor de optimale besturingsfunctie geldt: (Stelling 26).

$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*, p^*, u^*) = 0$

Dus $\frac{\partial H}{\partial u}(x^*, p^*, u^*) = p^* + u^* = 0 \quad \Rightarrow \quad u^*(t) = -p^*(t) = -e^{a(t-1)}.$

c. Optimaliserende besturingsfunctie gevonden bij b: $u^*(t) = -e^{a(t-1)}$

$u^*(0) = -e^{-a} \qquad\qquad \dot{u}^*(t) = -ae^{a(t-1)}.$

$u^*(1) = -1$

$\boxed{a \geq 0} \Rightarrow \dot{u}^*(t) \leq 0$ en dus $u^*(t)$ is een niet-stijgende functie

$\Rightarrow |u^*(t)| \leq 1.$

Dus als $a \geq 0$ en $M \geq 1$, dan kunnen we nog steeds $u^*(t) = -e^{a(t-1)}$ gebruiken als opt. best. functie.

Als $M < 1$, dan kunnen we niet of niet voor het gehele interval $u^*(t)$ gebruiken. Laat m het tijdstip zijn waarop $-e^{a(t-1)} = -M$.

Dan $u^{opt}(t) = \begin{cases} -e^{a(t-1)} & t \in [0, m) \\ -M & t \in (m, 1] \end{cases}$

Als $M \leq \frac{-1}{e^a}$ dan $u^{opt} = -M$.

$\boxed{a<0}$ $\Rightarrow \dot{u}^*(t) > 0$ is een stijgende functie
$\Rightarrow |u^*(t)| \leq e^{-a}$

Als $a<0$ en $M \geq e^{-a}$, dan kunnen we $u^*(t) = -e^{a(t-1)}$ gebruiken als opt. best. functie.

Als $a<0$ en $1 < M < e^{-a}$ dan wordt $u \Rightarrow$

$u^{opt} = \begin{cases} -M & t \in [0, m) \\ -e^{a(t-1)} & t \in (m, 1) \end{cases}$ waar m is het tijdstip waarop $-e^{a(t-1)} = -M$.

of als $M < 1$ dan $u^{opt} = -M$.

2a. $z = x - \bar{x}$ $\quad \dot{z} = \dot{x} = Ax + Bu = Ax + Bu - (\overbrace{A\bar{x} + B\bar{u}}^{=0}) = A(x-\bar{x}) + B(u-\bar{u})$
$= Az + Bv$

$v = u - \bar{u}$

Nu gaan we $x(s) - \bar{x}$ schrijven als $z(s)$ en $u(s) - \bar{u}$ schrijven als v. Het kostencriterium wordt dan:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^T [z(s)^T Q z(s) + v(s)^T R v(s)]\, ds = \int_0^T [z^T \tilde{Q} z + v^T \tilde{R} v]\, ds$$

met $\tilde{Q} = \frac{1}{2}Q$ en $\tilde{R} = \frac{1}{2}R$. Nu hebben we een standaard lineair-kwadratisch-optimaal besturingsprobleem met z en v.

De Riccati differentiaal vergelijking van het probleem:
$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^T P(t) + P(t) B \tilde{R}^{-1} B^T P(t) - \tilde{Q}$$
$$P(T) = G = 0$$

~~Stelling~~ Stelling 64.
$$v^{opt}(t) = -\tilde{R}^{-1} B^T P(t) z^{opt}(t)$$
met $\dot{z}(t) = [A - B\tilde{R}^{-1}B^T P(t)]z(t) \quad z(t_0) = z_0$

$$\Rightarrow u^{opt}(t) = v^{opt}(t) + \bar{u} = -\tilde{R}^{-1} B^T P(t) z^{opt}(t) + \bar{u}$$
$$= -\tilde{R}^{-1} B^T P(t)(x^{opt} - \bar{x}) + \bar{u}$$
met $\dot{x}(t) = \dot{z}(t) = [A - B\tilde{R}^{-1}B^T P(t)](x(t) - \bar{x})$
en $x(t_0) = x_0$.

?

Stelling 64
De waarde functie $V(z_0, t) = z_0^T P(t) z = [x_0 - \bar{x}, u_0 - \bar{u}] P(t) \begin{bmatrix} x_0 - \bar{x} \\ u_0 - \bar{u} \end{bmatrix}$

Als $T = \infty$ Gebruiken we niet de Riccati differ. vgl., maar de algebraïsche Riccati vergelijking:
$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$, waarby P_∞ is de positieve oplossing van deze vergelijking.
We kunnen nu op dezelfde manier als in Stelling 64 u^{opt} en zo berekenen alleen nu is $P(t) = P_\infty$.

2b $\dot{x} = -x + u = Ax + Bu$ met $A = -1$ en $B = 1$
$x(0) = 0$

Neem $(\bar{x}, \bar{u}) = (1, 1)$ want $\dot{x}(\bar{x}, \bar{u}) = -1 + 1 = 0$.

Dan $z = x - \bar{x} = x - 1$
$v = u - \bar{u} = u - 1$

$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^\infty z(s)^2 + v(s)^2 ds = \int_0^\infty [z^T(s)\frac{1}{2}I z(s) + v^T(s)\frac{1}{2}I v(s)] ds$

$J(v) = \int_0^\infty z^T Q z + u^T R u \, ds$ met $Q = \frac{1}{2}$ en $R = \frac{1}{2}$.

Dan volgt uit 2a:

De algebraïsche Riccati vergelijking:
$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$
$-2P - 2P^2 + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow P = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \Rightarrow P_\infty = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dan $\dot{x}(t) = [A - BR^{-1}B^T P_\infty](x(t) - \bar{x}) = [-1 - 2P_\infty](x(t) - 1)$
$= -\sqrt{2}\,x(t) + \sqrt{2}$
$x(0) = 0$

$\Rightarrow x^*(t) = -e^{-\sqrt{2}t} + 1$

Dan $u^{opt}(t) = -R^{-1}B^T P_\infty(x^{opt} - \bar{x}) + \bar{u} = -2P_\infty(x^{opt} - 1) + 1$
$= (1 - \sqrt{2}) \cdot - e^{-\sqrt{2}t} + 1 = -e^{-\sqrt{2}t} + \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} + 1$.

3a. $\dot{x} = -kx$
$\dot{k} = x^2 - k$

linearisatie rond $(x,k) = (0,0)$.

$\dot{z} = Az + Bu$ $\qquad A = \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} \; \frac{\partial f}{\partial \binom{x}{k}}(0,0) = \begin{pmatrix} -k & -x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}_{\substack{k=0 \\ x=0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = 0$

$\Rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z$

Eigenwaarden $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ berekenen. $\Rightarrow \lambda(A) = 0 \vee \lambda(A) = -1$.

Omdat een eigenwaarde van A gelijk aan nul is ~~kunnen~~ en de andere < 0 kunnen we m.b.v. linearizatie niks zeggen over de stabiliteit van $(0,0)$.

8

~~b.c. $\dot{x} = -kx$, $\dot{k} = x^2 - k^3$~~

b. Neem $V(x) = x^2 + k^2$

Bewijs $V(x) = x^2 + k^2$ is een Lyapunov functie.

1.) V is cont. differentiable. duidelijk!
2.) $V((0,0)) = 0$
en $V(x,k) > 0 \quad \forall (x,k) \neq (0,0)$
3.)
$\dot{V}(x) = 2x \cdot \dot{x} + 2k \cdot \dot{k} = 2x(-xk) + 2k \cdot (x^2 - k)$
$= -2x^2k + 2x^2k - 2k^2 \leq 0.$

Dus $V(x)$ is een Lyapunov functie en dus $(0,0)$ is een stabiel evenwichtspunt.

La Salle's Invariantie principe gebruiken om asymptotisch stabiel aan te tonen.
Neem $\Omega = \{ \binom{x}{k} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + k^2 \leq r \}$, $r \geq 0$, is een kompacte invariante verzameling.
$S = \{ \binom{x}{k} \in \Omega \mid k = 0 \}$. Nu kijken wat de grootste invariante deel verz. van S is.

~~wa~~ ik stubstitueer $k=0$ in de vergelijkingen van het systeem.

$k \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 0$

$0 = x^2 - 0$

Hieruit volgt dat x is constant en $x=0$. Dus het punt $(0,0)$ is de grootste invariante deelverzameling van S.

Nu volgt uit LaSalle's principe dat alle oplossingen in Ω convergeren naar $(0,0)$.

$\Rightarrow (0,0)$ assymp. stabiel.

Nu kunnen we Ω heel groot maken, neem r heel groot for $\forall (x_0, k_0)$ we can take an $r>0$ such that $(x_0, k_0) \in \Omega$. Nu volgt dat ~~voor~~ elke (x_0, k_0) naar $(0,0)$ convergeert dus het systeem is glob. asymp. stabiel.

c. Neem $V(x) = x^2 + k^2$.

Bewijs $V(x)$ is een Lyapunov functie.

1.)

2.) zie b.)

3.) $\dot{V}(x) = 2x\dot{x} + 2k \cdot \dot{k} = -2x^2k + 2x^2k - 2k^4 = -2k^4 \leq 0$.

Dus $V(x)$ is een Lyapunov functie en $(0,0)$ is stabiel.

bewijs for globaal asympt. stabiel gaat hetzelfde als bij b.

4a. $J(x(\cdot)) = \int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt + P(x(0))$ $\qquad x(T) = x_T$

Euler vergelijking:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\right) = 0$$

Normaal (voor het standaardprobleem) is de randvoorwaarde van de Euler vergelijking: $J(x(\cdot)) = \int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))dt + S(x(T))$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(T, x^*(T), \dot{x}^*(T)) + \frac{\partial S}{\partial x}(x(T)) = 0.$$

Propositie 9. ~~Stelling~~

Nu wordt de randvoorwaarde

$$-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(0, x^*(0), \dot{x}^*(0)) + \frac{\partial P}{\partial x}(x(0)) = 0.$$

Het bewijs volgt van de tweede regel van (1.33) op blz 8. van het dictaat.

We hebben nu dat 2e + 3e regel (1.33) is

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\,\delta x(t)\Big|_0^T - \int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\right)\delta x(t)\,dt + \frac{\partial P}{\partial x}(x^*(0))\,\delta x(0)$$

$$= -\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\right)\delta x(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\,\delta x(t)\Big|_0^T + \frac{\partial P}{\partial x}(x(0))\,\delta x(0) = 0$$

~~$\delta x(T)$~~ $\delta x(T) = 0$

en dus ~~$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})$~~ $-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(0, x(0), \dot{x}(0)) + \frac{\partial P}{\partial x}(x(0)) = 0.$ 8

b. De randvoorwaarden voor de Euler vergelijking worden nu

splitsen!

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(T, x(T), \dot{x}(T)) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(0, x(0), \dot{x}(0)) + \frac{\partial P}{\partial x}(x(0)) + \frac{\partial S}{\partial x}(x(T)) = 0.$$

Nu wordt ook $\frac{\partial S}{\partial x}(x(T))\,\delta x(T)$ aan het bewijs bij a toegevoegd.